第19講　ベクトル(1)

1 ［1］　平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ と $|2\vec{a}-\vec{b}|=2$ を満たしている．

(1)　$|\vec{a}|=k$ とするとき，$|\vec{b}|$ と $\vec{a}\cdot\vec{b}$ をそれぞれ k を用いて表せ．

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であるとき，$|\vec{a}|$ と $|\vec{b}|$ の値をそれぞれ求めよ．

［2］　平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|\vec{a}+2\vec{b}|=1$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=1$ を満たすように動く．
$|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値，最小値とそのときの $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ の値をそれぞれ求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円があり，その周上に異なる 3 点 A，B，C がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として次の問いに答えよ．

(1)　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ のとき，$\angle\mathrm{ACB}$ の大きさを求めよ．

(2)　$|\vec{a}+\vec{b}|=1$ のとき，$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさを求めよ．

(3)　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の値を求めよ．

(4)　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$ のとき，$\angle\mathrm{ACB}$ の大きさと $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積の最大値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　鋭角三角形 ABC の外接円の中心を O，重心を G，線分 AB を 2：1 に内分する点を P とする．$\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{2}{3}\pi$，$\angle \mathrm{BOC}=\dfrac{5}{6}\pi$，$\mathrm{OA}=1$　であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$　とするとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ の値を求めよ．また，三角形 OPG の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　ベクトル(1)

三角形ABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}$ とおく．$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-4$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=-3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$ を満たしている．$\vec{c}=$ ［ア］ $\vec{a}-\vec{b}$ より，$\vec{c}\cdot\vec{a}=-3$ とあわせて $|\vec{a}|^2=$ ［イ］ である．同様に $\vec{b}\cdot\vec{c}=-4$ より $|\vec{b}|^2=$ ［ウ］ である．したがって，三角形ABCの面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 19 講　ベクトル(1)

1　[1]　平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ と $|2\vec{a}-\vec{b}|=2$ を満たしている．

(1)　$|\vec{a}|=k$ とするとき，$|\vec{b}|$ と $\vec{a}\cdot\vec{b}$ をそれぞれ k を用いて表せ．

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であるとき，$|\vec{a}|$ と $|\vec{b}|$ の値をそれぞれ求めよ．

(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$　より

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=5$　　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5$　　$k^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5$　……①

$|2\vec{a}-\vec{b}|=2$　より

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4$　　$4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$　　$4k^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$　……②

①×2−②より　$-2k^2+|\vec{b}|^2=6$　　よって　$\boldsymbol{|\vec{b}|=\sqrt{2k^2+6}}$

①−②より　$-3k^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$　　よって　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3k^2+1}{2}}$

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{4}$

つまり　$\dfrac{3k^2+1}{2}=k\times\sqrt{2k^2+6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$(3k^2+1)^2=4k^2(k^2+3)$　　$5k^4-6k^2+1=0$　　$(5k^2-1)(k^2-1)=0$

$k^2=1,\ \dfrac{1}{5}$　　$k>0$ より　$k=1,\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$k=1$ のとき　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2\sqrt{2}$　　$k=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき　$|\vec{a}|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$|\vec{b}|=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

1　[2]　平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}+2\vec{b}|=1$，$|2\vec{a}-\vec{b}|=1$ を満たすように動く．

$|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値，最小値とそのときの $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ の値をそれぞれ求めよ．

$\vec{a}+2\vec{b}=\vec{x}$，$2\vec{a}-\vec{b}=\vec{y}$ とおくと，$|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$　　$\vec{a}=\dfrac{1}{5}(\vec{x}+2\vec{y})$　　$\vec{b}=\dfrac{1}{5}(2\vec{x}-\vec{y})$

$\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角を θ（$0\leqq\theta\leqq\pi$）とすると，$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta=\cos\theta$

$\vec{a}+\vec{b}=\dfrac{1}{5}(3\vec{x}+\vec{y})$ より

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\dfrac{1}{5^2}|3\vec{x}+\vec{y}|^2=\dfrac{1}{5^2}(9|\vec{x}|^2+6\vec{x}\cdot\vec{y}+|\vec{y}|^2)=\dfrac{1}{5^2}(10+6\cos\theta)$

よって　$|\vec{a}+\vec{b}|$ は

$\theta=0$　つまり　$\vec{x}=\vec{y}$ のとき　**最大値**　$\dfrac{\sqrt{16}}{5}=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$　をとり，このとき

$\vec{a}=\dfrac{3}{5}\vec{x}$，$\vec{b}=\dfrac{1}{5}\vec{x}$ より　$\boldsymbol{|\vec{a}|=\dfrac{3}{5}}$，$\boldsymbol{|\vec{b}|=\dfrac{1}{5}}$

$\theta=\pi$　つまり　$\vec{x}=-\vec{y}$ のとき　**最小値**　$\dfrac{\sqrt{4}}{5}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$　をとり，このとき

$\vec{a}=-\dfrac{1}{5}\vec{x}$，$\vec{b}=\dfrac{3}{5}\vec{x}$ より　$\boldsymbol{|\vec{a}|=\dfrac{1}{5}}$，$\boldsymbol{|\vec{b}|=\dfrac{3}{5}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上に原点Oを中心とする半径1の円があり，その周上に異なる3点A，B，Cがある．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$として次の問いに答えよ．

(1)　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$のとき，∠ACBの大きさを求めよ．

(2)　$|\vec{a}+\vec{b}|=1$のとき，∠AOBの大きさを求めよ．

(3)　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$のとき，$|\overrightarrow{AB}|$の値を求めよ．

(4)　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$のとき，∠ACBの大きさと△ABCの面積の最大値を求めよ．

(1)　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$　より　$\vec{a}=-\vec{b}$　よって　ABは円Oの直径．したがって　$\angle \mathbf{ACB=90^\circ}$

(2)　$|\vec{a}+\vec{b}|=1$　より　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$

したがって　$\cos\angle AOB=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$　より　$\angle \mathbf{AOB=120^\circ}$

(3)　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$　より　$\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$　　$|\vec{c}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2$　　$1=1+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$

したがって　$\angle AOB=120^\circ$　同様に　$\angle BOC=\angle COA=120^\circ$

よって　△ABCは正三角形である．

正弦定理より　$\dfrac{AB}{\sin 60^\circ}=2$　　ゆえに　$AB=|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=\sqrt{\mathbf{3}}$

【別解】　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$より　$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$　　$|\vec{a}+\vec{b}|=|-\vec{c}|=1$

よって(2)より　$\angle AOB=120^\circ$

ABの中点をMとすれば　$|\overrightarrow{AB}|=2AM=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\mathbf{3}}$

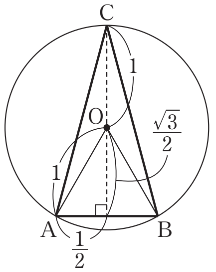
(4)　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$　より　$1+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=3$　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$　　よって　$\angle AOB=60^\circ$

したがって　$\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\mathbf{30^\circ}$　または　$\angle ACB=\dfrac{1}{2}(360^\circ-\angle AOB)=\mathbf{150^\circ}$

△ABCの面積が最大となるのは，点Cが線分ABの垂直二等分線上かつABに関してOと同じ側にあるときである．

△AOBが正三角形であることから，このときの面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\mathbf{2+\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　鋭角三角形 ABC の外接円の中心を O，重心を G，線分 AB を 2：1 に内分する点を P とする．$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2}{3}\pi$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{5}{6}\pi$，$\mathrm{OA}=1$　であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$　とするとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ の値を求めよ．また，三角形 OPG の面積を求めよ．

(1)　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2}{3}\pi$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{5}{6}\pi$　より　$\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\pi}{2}$　　したがって

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{2}{3}\pi=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\frac{5}{6}\pi=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\qquad \boldsymbol{\vec{c}\cdot\vec{a}=0}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{9}(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c})$$

$$=\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{2}-1+2-\sqrt{3}\right)=\boldsymbol{\frac{3-2\sqrt{3}}{18}}$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\dfrac{1}{3^2}|\vec{a}+2\vec{b}|^2=\dfrac{1}{3^2}(|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{1}{3}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2=\frac{1}{3^2}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{3^2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{9}$$　より

$$\triangle\mathrm{OPG}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{2-\sqrt{3}}{9}-\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{18}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2^2\times3^3}\{4(2-\sqrt{3})-(7-4\sqrt{3})\}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\times3^2}\sqrt{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{36}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 19 講　ベクトル(1)

三角形 ABC において，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ とおく．$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-4$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=-3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$ を満たしている．$\vec{c}=$ ［ア］ $\vec{a}-\vec{b}$ より，$\vec{c}\cdot\vec{a}=-3$ とあわせて $|\vec{a}|^2=$ ［イ］ である．同様に $\vec{b}\cdot\vec{c}=-4$ より $|\vec{b}|^2=$ ［ウ］ である．したがって，三角形 ABC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{カ}}$ である．

$\vec{c}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\vec{a}-\vec{b}$　より

$\vec{c}\cdot\vec{a}=(-\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=-|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|^2+5=-3$　　ゆえに　$|\vec{a}|^2=\mathbf{8}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot(-\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=5-|\vec{b}|^2=-4$　　ゆえに　$|\vec{b}|^2=\mathbf{9}$

したがって，$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|-\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-\{(-\vec{a})\cdot\vec{b}\}^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{8\times9-25}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{47}}}{\mathbf{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。